KANNER

GRUNDLAGE ZU E
DES MITTLEREN

# GRUNDLAGE

zu einer Theorie

# des mittleren Risiko

## bei Lebens-Versicherungen

von

DR. M. KANNER.

Separat-Abdruck aus dem Journal des Collegiums für
Lebensversicherungs-Wissenschaft.

**BERLIN.**

Verlag von W. Weber.

1870.

## Vorwort.

Die vorliegende Arbeit bildet eine Erweiterung meiner Abhandlung über das „mittlere Risiko“, welche ich in No. 60, 64, 71 u. 76 der Deutschen Versicherungs-Zeitung vom Jahre 1867 veröffentlicht habe. Auf meine späteren Beiträge, die eine Verallgemeinerung der Theorie enthalten und hier berücksichtigt sind, ist an den betreffenden Stellen in Anmerkungen hingewiesen worden.

Die wichtige Risiko-Frage, welche von verschiedenen Seiten, aber mit Misserfolg behandelt worden war, wurde im Frühjahr 1867 der Gegenstand meiner Untersuchungen. In der gewonnenen Ueberzeugung, dass nur eine scharfe mathematische Definition die Grundlage zu einer entwickelungsfähigen Theorie geben kann, und dass die bisherigen Versuche nur durch die falsche Auffassung der Frage gescheitert sind, ging ich auf die wahre Bedeutung der Mortalitätstafeln vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück und nach einer streng mathematischen Interpretation derselben musste sich ergeben, dass alle Prämien- und Reserve-Berechnungen das zukünftige Eintreffen von Sterblichkeitsverhältnissen voraussetzen, die nicht gewiss sind, denen aber eine bestimmbare Wahrscheinlichkeit zukommt, die unter den Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Fälle diejenige ist, welche den grössten Werth hat. Da nun für alle möglichen, günstigen oder ungünstigen, Fälle die Wahrscheinlichkeiten angebbar sind, so nahm

ich die Summe aus allen möglichen Verlusten durch Abweichungen vom wahrscheinlichsten Falle, multiplicirt mit deren resp. Wahrscheinlichkeiten, als Mass für das Risiko an, und nannte diese Summe aus den in meiner Abhandlung angegebenen Gründen das „mittlere Risiko“, wofür man mit ganz gleichem Rechte nach einem daselbst bewiesenen Satze auch die Summe aller eventuellen Gewinne mit ihren resp. Wahrscheinlichkeiten multiplicirt, nehmen kann.

Dieser Begriff des mittleren Risiko schliesst in der That in sich Alles, was a priori zu fordern ist. Das mittlere Risiko hat nämlich die Eigenschaft, dass es bei unveränderter Gesammtsumme mit der Zahl der Versicherten, auf welche sich dieselbe gleichmässig vertheilt, abnimmt und im Unendlichen verschwindet. Bei derselben Gesammtsumme und bei derselben Zahl von Versicherten ist es um so grösser, je verschiedener die Beträge sind, welche auf die einzelnen Personen fallen. In diesem Gefühle des grösseren Risiko finden die Rückversicherungen ihre Begründung. Da ferner jeder Verlust stets durch die Reserve mit bestimmt wird, so hat das mittlere Risiko auch die Eigenschaft, dass es ceteris paribus mit wachsender Reserve abnimmt.

Der erste Theil meiner Abhandlung, der alles Wesentliche schon enthält, erschien am 28. Juli 1867 und der Schluss am 22. September desselben Jahres. Bald darauf gegen Mitte October 1867 erschien eine Schrift von Herrn Professor Wittstein in Hannover betitelt „Mathematische Statistik“, die hinsichtlich der Theorie der Mortalitätstafeln ganz von denselben Grundanschauungen ausgeht, welche in meiner Abhandlung ausgesprochen sind. Eine Folge davon ist, dass auch die Resultate mit den meinigen übereinstimmen; so der Satz von dem wahrscheinlichsten Sterblichkeitsverhältniss aus verschiedenen Beobachtungsresultaten, wobei Heym und Fischer auf falsche Wege geriethen (vide pag. 29); ebenso das Integral, welches den Grenzwerth für die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass die wahre Sterbenswahrscheinlichkeit zwischen zwei gegebenen Werthen liege. Herr Professor Wittstein hat aber in Verfolgung der Grundgedanken seine Untersuchungen über die Mortalität noch viel weiter geführt und nützliche Resultate er-

halten. Auch dem Risiko ist in der genannten Schrift §. 6 eine kurze Betrachtung gewidmet. Wittstein spricht von einem Risiko der Ueberlebenden, dessen Definition sich nur auf die Abweichungen von der wahrscheinlichsten Sterblichkeit in Bezug auf die Personenzahl erstreckt; von einem Risiko bei einem gegebenen Versicherungsbestande mit verschiedenen Sterbenswahrscheinlichkeiten, verschiedenen Summen und mit Rücksicht auf die Reserve ist dort keine Erwähnung. Das Integral, welches Wittstein hierbei entwickelt, kann allerdings bei Personen gleichen Alters und mit gleichen reducirten Summen, als Grenzwerth für das mittlere Risiko angewandt werden. Man wird aber bei Verfolgung der Wittstein'schen Betrachtung und seiner Zahlenexempel finden, dass derselbe nicht auf dem von mir eingeschlagenen Wege war, auf den er nur durch die allgemeine Definition und richtige Auffassung des Verlustes geführt worden wäre.

Berlin, im Februar 1870. **Kanner.**

---

## §. 1.

## Begriffsentwickelung für Versicherungen auf den Todesfall einzelner Personen.

Eine Versicherungsbank, welche gegen feste Prämien Zahlungsverbindlichkeiten auf den Todesfall übernimmt, geht mit jeder der versicherten Personen, streng genommen, eine Wette ein, wobei die Einsätze sich wie die Wahrscheinlichkeiten der zwei entgegengesetzten Ereignisse verhalten. Jede Versicherung auf den Todesfall lässt sich in partielle Versicherungen auf eine bestimmte Zeit, etwa eines Jahres, zerlegen. Sei das versicherte Kapital C und die Sterbenswahrscheinlichkeit innerhalb des ersten Jahres w, so bildet w C den Einsatz oder die Prämie des Versicherten, und (1—w) C den Einsatz der Bank, d. h. denjenigen Betrag, welchen dieselbe im Todesfalle des Versicherten verlieren würde. Beide Einsätze zusammengenommen bilden also das versicherte Kapital.

Ist die Anzahl der Versicherten hinreichend gross, so kann die Sterblichkeit unter den Versicherten in der Art erfolgen, dass für die Bank weder Gewinn noch Verlust entsteht, d. h. dass die Einnahmen an Prämien und bereits vorhandenen Reserven mit Hinzurechnung der Zinsen den Ausgaben für Sterbefälle und den noch etwa für die Lebenden zurückzustellenden Reserven gleich werden.

Als versicherte Summe ist stets derjenige Betrag anzusehen, welcher sich ergiebt, indem man von der im Falle des Todes auszuzahlenden Summe den Betrag abzieht, welcher für den Lebensfall reservirt werden müsste. Nennt man diese Differenz das reducirte Capital, so hat der Fall, in welchem weder Gewinn

noch Verlust entsteht, unter allen möglichen Fällen die grösste Wahrscheinlichkeit, wenn alle Personen mit gleichen reducirten Capitalien versichert sind und dieselbe Sterbenswahrscheinlichkeit haben. Dieser Fall ist aber nur unter den seltenen Umständen physisch möglich, wenn bei gleichen Summen w n eine ganze Zahl ist, wo n die Zahl der Versicherten bedeutet, oder wenn bei verschiedenen Summen irgend eine Combination der Sterbenden möglich ist, wobei die Leistungen den Einnahmen gleich werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gewinn oder Verlust beliebig enge Grenzen nicht überschreiten werde, wächst überdies bei unveränderter Gesammtsumme mit der Zahl der Versicherten, auf welche sich diese Gesammtsumme gleichmässig vertheilt und es kann diese Wahrscheinlichkeit der Gewissheit so nahe gebracht werden als man will, wenn man die Zahl der Versicherten hinreichend vermehrt, und die Gesammtsumme unverändert lässt.

Dieser Satz findet seine Begründung in dem Princip der grossen Zahlen, welches, seitdem der berühmte Mathematiker Jacob Bernoulli nach zwanzigjährigem Nachdenken einen strengen Beweis dafür gefunden hat, nicht mehr als blosser Erfahrungssatz gilt, sondern als mathematische Nothwendigkeit erkannt ist.

Es ergiebt sich hieraus als nothwendige Folgerung, dass das Risiko der Abweichung vom wahrscheinlichsten Fall desto grösser ist, je kleiner die Zahlen und je ungleichmässiger die reducirten Summen vertheilt sind.

Der wahrscheinlichste Fall ist derjenige, unter dessen Voraussetzung die Versicherungsgesellschaften ihre Tarife berechnen, indem ihr Gewinn lediglich im Zinsüberschuss und einem Theil des Aufschlages auf die Netto-Prämie bestehen soll. Ebenso hat die Prämien-Reserve die characteristische Eigenschaft, dass sie, unter Voraussetzung des wahrscheinlichsten Falles für die Zukunft, nebst den einzunehmenden Prämien zur Deckung der von der Bank übernommenen Verbindlichkeiten genau ausreichen würde.

Daraus geht nun hervor, dass die Prämien-Reserve allein die billigerweise zu verlangende Garantie nicht bietet, weil die Eventualität eines Verlustes nicht vorgesehen ist. Zu diesem Zwecke muss also jede Versicherungsbank jährlich einen besondern Fonds

(Capital-Reserve) haben, dessen Höhe am Anfange eines jeden Jahres nach dem Versicherungsbestande zu bestimmen ist. Diesen Fonds zu bestimmen, ist eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, denn man kann nicht daran denken, für alle möglichen Verluste nach ihrem vollen Werthe vorgesehen zu sein, sondern man wird das mittlere Risiko berechnen, indem man jedem möglichen Falle nach Massgabe seiner Wahrscheinlichkeit Rechnung tragen wird.

## §. 2.

## Ueber die Ermittelung des wahrscheinlichsten Sterblichkeitsverhältnisses.

Es liegt ausserhalb meines Zweckes, auf die Theorie der Construction von Mortalitätstafeln einzugehen, nur so viel will ich hier nachweisen, dass eine Tafel, welche aus einer Reihe von einander unabhängiger, fehlerfreier und unter gleichen Verhältnissen gemachter Beobachtungen durch Summation der Lebenden und Sterbenden für jedes Alter hervorgeht, die wahrscheinlichsten Werthe der wirklichen Sterblichkeitsverhältnisse angiebt, während diese selbst uns nothwendig unbekannt bleiben müssen.

Hat man nämlich für ein bestimmtes Alter folgende Data:

Von $n_1$ Lebenden starben $m_1$<br>
„ $n_2$ „ „ $m_2$<br>
„ $n_3$ „ „ $m_3$<br>
⋮ ⋮<br>
„ $n_k$ „ „ $m_k$

innerhalb eines Jahres, so wird demjenigen Werthe des unbekannten Sterblichkeitsverhältnisses die grösste Wahrscheinlichkeit beizulegen sein, bei dessen Annahme der Erfolg oder das gleichzeitige Stattfinden der Beobachtungsresultate die grösste Wahrscheinlichkeit hat. Sei x irgend ein Sterblichkeitsverhältniss zwischen 0 und 1, und man setze der Kürze wegen

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = N,$$
$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k = M,$$

so wird die Wahrscheinlichkeit irgend eines Erfolges (m, n) ausgedrückt werden durch:

$$B.\, x^m (1 - x)^{n-m},$$

wo B den m ten Binomial-Coefficienten der n ten Potenz bedeutet. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens aller k von einander unabhängigen Ereignisse ist gleich dem Producte ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten, d. i.

$$C.\, x^M (1 - x)^{N - M},$$

wo C das Product aller k Binomial-Coefficienten bedeutet.

Soll also jener Ausdruck ein Maximum werden, so hat man den ersten Differentialquotienten gleich 0 zu setzen und man erhält, nach Weglassung des constanten Factors C,

$$M.\, x^{M-1} (1 - x)^{N - M} - (N - M)\, x^M (1 - x)^{N - M - 1} = 0,$$

und hieraus:

$$x = \frac{M}{N},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.*)

Aus der vorangegangenen Begriffsentwickelung des Risiko ist einleuchtend, dass dieses auch noch dann stattfindet, wenn die zu Grunde liegende Mortalitätstafel vollkommen richtig ist, d. h. die wirklichen Sterblichkeitsverhältnisse darstellt. Eine absolute Richtigkeit ist aber nie zu erreichen, und dieser Umstand kann als eine zweite Gefahrquelle für die Bank angesehen werden, von der wir aber hier nicht handeln wollen.

---

*) Bei diesem Beweise ist der Satz von Bayes. (Philosophical Transactions 1763) über die Wahrscheinlichkeiten der Ursachen als bekannt vorausgesetzt. Wittstein hat in seiner etwa 3 Monate nach Veröffentlichung des ersten Theiles meiner Abhandlung erschienenen Schrift genau dasselbe bewiesen, aber ohne von jenem Satze Gebrauch zu machen.

§. 3.

## Definition des Verlustes beim Todesfalle für Kapital-Versicherungen einzelner Personen.

Der Verlust beim Todesfalle eines Versicherten vom Alter x mit dem Capital C besteht in diesem Capital weniger der letzten Reserve, Res (x), weniger der letzten Prämie p (x) und weniger den einjährigen Zinsen von beiden Beträgen, d. i.

$$C - \left(\text{Res}\,(x) + p\,(x)\right)\left(1 + \frac{z}{100}\right).$$

Es besteht aber zwischen der alten Reserve, Rex (x), und der neuen, Res (x + 1), die leicht nachzuweisende Relation:

$$\left(\text{Res}\,(x) + p\,(x)\right)\left(1 + \frac{z}{100}\right) = \text{Res}\,(x+1) + w\left(C - \text{Res}\,(x+1)\right),$$

wo w die Sterbenswahrscheinlichkeit für das (x + 1)te Jahr und z den Zinsfuss bedeutet. Man kann daher den eventuellen Verlust in folgende Form bringen:

$$C - \text{Res}\,(x+1) - w\left(C - \text{Res}\,(x+1)\right),$$

und wir wollen den Ausdruck C − Res (x + 1) das reducirte Capital, so wie w (C — Res (x + 1)) die reducirte Prämie nennen.

Die reducirte Prämie ist derjenige Betrag, welchen die Bank für die Gefahr des abgelaufenen Jahres erhält, während der Rest der Einnahmen der neuen Reserve angehört. Die beiden hier eingeführten Begriffe sind bei allen einschlagenden Untersuchungen von grosser Wichtigkeit.

§. 4.

## Allgemeine Definition von Gewinn und Verlust bei irgend einem gegebenen Versicherungsbestand.

Bei jeder Versicherung einer oder mehrerer Personen giebt es stets eine bestimmte Anzahl von Fällen, für deren Eintreffen gewisse Zahlungsverbindlichkeiten zwischen beiden contrahirenden Theilen im Voraus stipulirt werden. Diese Bedingungen können

in den verschiedenen Jahren der Versicherungsdauer verschieden sein, innerhalb eines gegebenen Jahres aber sind sie in der Praxis unveränderlich, so dass am Beginne eines jeden Versicherungsjahres im Voraus feststeht, was für jeden möglichen Fall am Ende des Jahres geschehen solle, und giebt es dann im Allgemeinen eine Einlage der versicherten Partei bei der versichernden Bank, die aus der Einlage beim Beginn des Jahres (Reserve des letzten Jahres sammt Prämie oder weniger Rente für das betreffende Jahr) nebst den Zinsen gebildet wird.

Nennt man diese Einlage am Ende des Jahres E und die Leistungen für die distinguirten Fälle, deren Wahrscheinlichkeiten: $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots$ sein mögen, entsprechend: $C_0, C_1, C_2 \ldots$, so muss, wenn alle möglichen Fälle berücksichtigt sind*), zwischen diesen Grössen die Bedingungsgleichung bestehen:

$$1)\quad E = \varphi_0 C_0 + \varphi_1 C_1 + \varphi_2 C_2 + \cdots + \varphi_n C_n,$$

wo die Grössen C irgend welche Leistungen, seien es Capitalien, Renten, Prämienrückgewähr-Beträge oder auch Reserven, bedeuten können, und positiv oder negativ sind, je nachdem sie Verpflichtungen der Bank oder der versicherten Partei darstellen.

Da alle möglichen Fälle berücksichtigt sind, so müssen die $\varphi$ der Bedingung genügen

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = 1.$$

Wenn die Werthe von E und aller $\varphi$ bekannt sind, so sind, wenn es $n + 1$ Fälle giebt, n Werthe der Leistungen willkürlich, während die eine Leistung durch die Bedingungsgleichung bestimmt wird, d. h. also, wenn für alle Fälle die Leistungen im Voraus bestimmt werden sollen, so haben sie dieser Bedingungsgleichung zu genügen. Weiss man nun, dass eine Versicherung dieser Gleichung gemäss geschlossen ist, und sind n Leistungen bekannt, so lässt sich die eine unbekannte Leistung finden.

Wenn es demnach nur einen Fall giebt, für welchen eine Reserve nöthig ist, so lässt sich diese Reserve, als Leistung angesehen, aus der Grösse E und den Bedingungen, welche im verflossenen Jahr geltend gewesen sind, berechnen.

---

*) Bei n Personen giebt es höchstens $2^n$ Fälle.

Giebt es aber mehrere, etwa m Reservefälle, so müssen $n-m+1$ Leistungen sowie $m-1$ Reserven bekannt sein.

Die Gleichung 1) besteht immer, welcher Natur die Leistungen auch sein mögen, und sie ist symmetrisch in Beziehung auf alle Monome $\varphi C$.

Für eine einzelne Versicherung auf den Todesfall hat man z. B.

$$E = \varphi_0 C_0 + \varphi_1 C_1,$$

wenn $C_1$ das versicherte Capital für den Fall, dessen Wahrscheinlichkeit $\varphi_1$ ist, und $C_0$ die für den Fall, dessen Wahrscheinlichkeit $\varphi_0$ ist, erforderliche Reserve bedeutet. Hieraus folgt:

$$\text{a) } C_0 = \frac{E - \varphi_1 C_1}{\varphi_0},$$

$$\text{b) } C_1 = \frac{E - \varphi_0 C_0}{\varphi_1},$$

so dass b) und a) erhalten wird, wenn man $C_0$ mit $C_1$ und $\varphi_0$ mit $\varphi_1$ vertauscht. Führt man die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen ein, so kommt, wenn $r = 1 + \frac{z}{100}$ gesetzt wird,

$$E = \left(\text{Res}\,(x) + p\,(x)\right) r. \quad \varphi_0 = 1 - w. \quad \varphi_1 = w$$

$$C_0 = \text{Res}\,(x+1). \quad C_1 = C,$$

und hieraus:

$$\text{Res}\,(x+1) = \frac{\left(\text{Res}\,(x) + p\,(x)\right) r - w\,C}{1 - w},$$

welche Gleichung mit der bereits gegebenen Beziehung zwischen beiden Reserven identisch ist.

Jeder gegebene Versicherungsbestand kann als eine einzelne Versicherung insofern aufgefasst werden, als für jeden möglichen Fall die Leistungen bestimmt sind. Nennt man nun E die Gesammteinlage der Versicherten und wie früher $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ die Wahrscheinlichkeiten der Fälle, welchen resp. die Gesammtleistungen $C_0, C_1 \ldots C_n$ entsprechen, so muss auch, wie im nächsten Paragraphen bewiesen wird, für den ganzen Versicherungsbestand die Gleichung 1) stattfinden, die man aber mit Berücksichtigung, dass auch hier

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = 1$$

ist, schreiben kann

2) $\varphi_0 (C_0 - E) + \varphi_1 (C_1 - E) + \varphi_2 (C_2 - E) + \ldots + \varphi_n (C_n - E) = 0.$

Diese Gleichung bildet das Fundament aller hierher gehörigen Untersuchungen und wird uns später zu einer rein analytischen Definition des mittleren Risiko dienen.

Trifft irgend ein Fall ein, in welchem die Leistung $C_k$ erforderlich ist, so hat die Bank gegen die Rechnungs-Grundlage Verlust oder Gewinn, je nachdem $C_k - E$ positiv oder negativ ist, d. h. dieser Ausdruck giebt die Differenz zwischen dem rechnungsmässigen und wirklichen Geschäftsresultat.

Wenn $C_0$ die Gesammtleistung der Bank bedeutet für den Fall, dass 0 Personen sterben, dann stellt $C_0 - E$ den rechnungsmässigen Gewinn oder Verlust durch Todesfälle dar, je nachdem diese Differenz positiv oder negativ ist. Ist nämlich $C_0 > E$, so würde die Bank Ende des Jahres mehr ausgeben als einnehmen, wenn alle Versicherten am Leben blieben und diese Differenz muss daher durch Todesfälle, wie bei Rentenversicherungen, gewonnen werden. Ist hingegen $C_0 < E$, so findet das Umgekehrte statt und die Differenz bedeutet den Betrag, welchen die Bank rechnungsmässig durch Todesfälle verlieren kann.

Nur in dem Falle, wo $C_k - E = 0$ ist, hat die Bank weder Gewinn noch Verlust und das Resultat ist ein rechnungsmässiges.

Da man in diesem Falle $C_k$ für E setzen kann, so ist auch $C_0 - C_k$ der rechnungsmässige Gewinn oder Verlust durch Todesfälle*).

---

*) Wie diese Beziehungen zu einer Reserve-Controle benutzt werden können, habe ich in No. 79 Jahrg. 1869 der „Deutschen Versicherungszeitung" gezeigt. Auch habe ich daselbst die Bedingung für die Stabilität der Reserve angegeben.

## §. 5.

## Beweis des Satzes, dass die im vorhergehenden Paragraphen gegebene Bedingungsgleichung für jeden Versicherungsbestand und zu jeder Zeit besteht.

Wenn jede einzelne Versicherung einer oder mehrerer Personen der Bedingungsgleichung gemäss geschlossen ist, so behaupte ich: diese Gleichung findet alsdann auch für das ganze System dieser einzelnen Versicherungen statt, wenn man dasselbe wie eine einzige Versicherung ansieht.

Beweis:

Es seien zwei beliebige Versicherungen durch ihre Gleichungen:

$$1)\ \varphi_0 A_0 + \varphi_1 A_1 + \dots\dots + \varphi_{(n-1)} A_{(n-1)} = 0$$

$$2)\ \varphi_n A_n + \varphi_{(n+1)} A_{(n+1)} \cdot\cdot + \varphi_r A_r = 0$$

repräsentirt, wo allgemein $A_k$ statt $C_k - E$ eingesetzt ist, so wird die aus beiden zusammengesetzte Versicherung gebildet aus der Verbindung jedes Falles der einen mit jedem Falle der andern Versicherung. Die Wahrscheinlichkeit jedes so zusammengesetzten Falles wird allgemein durch $\varphi_g \,.\, \varphi_h$ und die demselben entsprechende Leistung durch $A_g + A_h$ dargestellt; es ist daher zu beweisen, dass die Summe aller so gebildeten Glieder, deren allgemeiner Ausdruck

$$\varphi_g \cdot \varphi_h (A_g + A_h)$$

ist, gleich 0 sein muss, oder dass die Gleichung

$$3)\ \sum_{g=0}^{g=n-1} \sum_{h=n}^{h=r} \varphi_g \cdot \varphi_h (A_g + A_h) = 0$$

stattfindet. Denkt man sich zu diesem Behufe die Summation aller Glieder ausgeführt, die ein bestimmtes Glied $\varphi_g$ der Gleichung 1) zum gemeinschaftlichen Factor haben, so wird diese Summe sein

$$\varphi_g \left\{ (\varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots \varphi_r) A_g + \varphi_n A_n + \dots + \varphi_r A_r \right\}$$

und da

$$\varphi_n + \varphi_{n+1} + \dots\dots + \varphi_r = 1$$

$$\varphi_n A_n + \varphi_{n+1} A_{n+1} \cdot\cdot + \varphi_r A_r = 0,$$

so reducirt sich der vorige Ausdruck auf das einzige Glied $\varphi_g . A_g$ und man erhält die gesuchte Summe 3), wenn man für g successive alle Zahlen von 0 bis n—1 setzt und alle n Glieder addirt, wodurch man erhält

$$\sum_{g=o}^{g=n-1} \sum_{h=n}^{h=r} \varphi_g \cdot \varphi_h (A_g + A_h) = \varphi_0 A_0 + \varphi_1 A_1 + \cdots + \varphi_{n-1} A_{n-1} = 0$$

Somit ist der Satz für zwei beliebig zusammengesetzte Gleichungen bewiesen. Da man aber das Resultat zweier Gleichungen wiederum mit einer dritten und das so erhaltene Resultat mit einer vierten Gleichung u. s. f. zusammensetzen kann, so gilt der Satz für jede beliebige Zahl von Gleichungen, d. h. für jedes System von Versicherungen, welches als eine einzige Versicherung aufgefasst werden soll.*)

## §. 6.

## Analytische Definition des mittlern Risiko bei einem gegebenen Versicherungsbestande.

Um einen Massstab für das Risiko bei einem gegebenen Versicherungsbestand und für den Zeitraum eines Jahres zu finden, gehe ich von dem einfachen Princip aus, dass diejenige Prämie, welche die versichernde Bank an eine andere zu bezahlen hätte, um sich gegen jeden möglichsten Verlust während eines Jahres zu versichern, ein Mass für das Risiko abgiebt oder das mittlere Risiko darstellt, welcher Name später gerechtfertigt werden soll.

*) In diesem Satze ist zugleich der Beweis enthalten, dass bei den bestehenden Einrichtungen der öffentlichen Spielbanken, wonach die Bank bei jeder einzelnen Chance im Vortheil ist, kein irgendwie erdachtes Spielsystem dem Spieler Vortheil bringen kann.

Denkt man sich nämlich den Vortheil der Bank durch eine positive Leistung ausgeglichen, so findet auch da für jedes Spielsystem die Gleichung 3) statt, d. h. also: es kann dem Spieler durch kein System gelingen, jene Summe positiv zu machen, und die verschiedenen Systeme können nur das mittlere Risiko des Spielers ändern, während der Nachtheil für denselben stets vorhanden ist.

Diese Prämie wird erhalten, wenn man in der allgemeinen Gleichung 3) sämmtliche positive Glieder addirt. Da aber die Addition der negativen Glieder dasselbe Resultat geben muss, so kann man diejenige Addition wählen, bei welcher weniger Glieder vorkommen. Die auf die eine oder andere Weise erhaltene Summe stellt also das mittlere Risiko dar.*)

Die wirkliche Ausführung dieser Rechnung dürfte in den meisten Fällen sehr mühsam sein und die Aufsuchung von Näherungsmethoden erfordern. Vom theoretischen Standpunkte aber ist es schon von wesentlicher Bedeutung, dass die Rechnung überhaupt ausgeführt werden kann und das mittlere Risiko hiernach einen bestimmten Zahlenwerth erhält.

## §. 7.

## Das mittlere Risiko als Massstab für den Sicherheitsfonds.

Ich wende mich jetzt zu der practischen Seite des Gegenstandes, um die Anwendung des mathematischen Begriffs des mittleren Risiko in ein helles Licht zu setzen. Die Meinungen anderer Autoren gehen hinsichtlich des Begriffs eben so weit auseinander wie ihre Theorien und die Resultate, zu denen sie geführt werden. Sollte denn die Frage des Risiko in der That so vager Natur sein, wie es die verschiedenen Behandlungsweisen derselben darzuthun scheinen? — In practischer Hinsicht ist dies unzweifelhaft der Fall, aber keineswegs vom mathematischen Standpunkte aus, insofern die Frage selbst mathematisch gestellt wird.

So lange man nämlich von einem Risiko schlechtweg redet, hat man eben so wenig einen mathematisch definirten Begriff im Auge, wie bei der ferneren Lebensdauer an sich, aber eben so wie diese erst durch den mittleren Werth derselben fixirt wird, kann auch von einem Risiko im mathematischen Sinne erst dann

*) Diese rein analytische Definition des mittlern Risiko habe ich in No. 101 Jahrg. 1868 der „Deutschen Versicherungs-Zeitung" gegeben.

die Rede sein, wenn man den mittleren Werth desselben einführt. Das Risiko ist jede für die versichernde Bank nachtheilige Möglichkeit irgend eines Verlustes und daher an sich unbestimmt. Denkt man sich aber irgend einen Versicherungsbestand häufig wiederholt, so etwa, dass man sich eine unbestimmte Anzahl von Banken mit gleichem Versicherungsbestande vorstellt, so wird innerhalb einer gegebenen Zeit das Gesammt-Resultat der Banken, wenn deren Anzahl unendlich gross gedacht wird, weder Gewinn noch Verlust ergeben. Die einzelnen Banken jedoch werden die eine Gewinn, die andere Verlust von verschiedener Grösse aufzuweisen haben, und zwar werden alle möglichen Fälle im Verhältnisse ihrer Wahrscheinlichkeiten auftreten. Der Grenzwerth des Verhältnisses der sämmtlichen Verluste zu der Zahl der Banken stellt den mittleren Verlust dar, der dem mittleren Gewinn gleichkommt, und hierin liegt der practische Sinn des mittleren Risiko, sowie die Rechtfertigung der Benennung.

Es entsteht nun die wichtige Frage: Ist dieses mittlere Risiko geeignet, die Capital-Reserve zu vertreten, oder mit anderen Worten: bietet die Bank schon alle Sicherheit, wenn sie einen solchen Fonds ausser ihrer Prämien-Reserve besitzt?

Diese Frage entzieht sich der mathematischen Betrachtung, weil hier nach einer der Willkür überlassenen Grösse gefragt wird, zu deren Bestimmung mathematisch ausdrückbare Bedingungen nicht vorliegen. Es handelt sich hier um eine von irgend einer Meinung abhängige Zahl, durch welche angegeben werden soll, aus welchem Vielfachen des mittleren Risiko die Capital-Reserve zu bilden sei. Diese Zahl würde den Grad der Sicherheit der Bank bestimmen, während das mittlere Risiko selbst das Mass der Gefahr für verschiedene Versicherungsbestände darstellt. Wenn eine Bank sich einmal für ein bestimmtes Vielfache entschieden hätte, so könnte sie mit Aenderung ihres Versicherungs-Bestandes im Laufe der Zeit auch ihre Capital-Reserve nach den vorgeschriebenen Regeln ändern und mit Beibehaltung desselben Vielfachen denselben Grad der Sicherheit aufrecht erhalten. Auf diese Weise hätte man einen sicheren Regulator der Capital-Reserve mit wissenschaftlicher Basis, während das übliche Verfahren, einen gewissen

Theil des Gewinnes zurückzulegen, die Sicherheit der Bank von der Höhe der etwaigen Gewinne in Abhängigkeit setzt, welches Verfahren durchaus unzweckmässig ist.

§. 8.

## Das mittlere Risiko einzelner Versicherungen als Massstab für die Zuschläge auf die Netto-Prämien.

Wenn man bei jeder einzelnen Versicherung die eventuellen Gewinne oder Verluste bis zum gänzlichen Erlöschen der Versicherung mit ihren resp. Wahrscheinlichkeiten multiplicirt, so erhält man für verschiedene Zahlungsmodalitäten der Prämien verschiedene Werthe des mittleren Risiko. Hiernach kann man also die einzelnen Gefahren, welche aus den verschiedenen Versicherungs-Modalitäten resultiren, mit einander vergleichen und einen Massstab für den Zuschlag auf die Netto-Prämie für die verschiedenen Tarife gewinnen.

§. 9.

## Das mittlere Risiko als Folgerung aus dem Princip der grossen Zahlen.

Bei der Feststellung des Begriffs, der mit dem Worte Risiko zu verbinden ist, hielten wir die Voraussetzung fest, dass der Mortalitäts-Tafel keine Mängel anhaften, seien es solche, die technisch begangen werden können, oder seien es die unbekannten Abweichungen von den wirklichen Sterbenswahrscheinlichkeiten, d. h. den wahren Sterblichkeitsgesetzen, deren wahrscheinlichste Werthe wir nur suchen und besitzen können. Wir haben gesehen, dass selbst unter dieser Voraussetzung die Sterblichkeit nach der Mortalitätstafel niemals mit Gewissheit zu erwarten ist, sondern dass sie unter allen möglichen Sterblichkeitsverhältnissen diejenige ist, der die grösste Wahrscheinlichkeit zukommt, wenn ihr die physische Unmöglichkeit nicht entgegensteht. Ueber diesen Punkt

begegnet man häufig irrigen Anschauungen, es wird nur zu oft von zufälligen Abweichungen gesprochen, als ob die Sterblichkeit unter normalen Verhältnissen, d. h. so lange keine neuen Ursachen hinzukommen, nothwendig oder mit hoher Wahrscheinlichkeit den Verhältnissen der Mortalitätstafel gemäss erfolgen müsste. Man nimmt die Angaben der Tafel etwas zu wörtlich, wenn man sagt: „von so und so viel Neugebornen müssen nach einer gewissen Zeit so und so viel noch am Leben sein", während diese nur das Grenzverhältniss für eine unendlich grosse Zahl Neugeborner angeben soll. Wenn also bei einer noch so grossen aber endlichen Zahl ein anderes Verhältniss auftritt, so giebt es nicht den mindesten Grund, darin besondere Ursachen zu erblicken; denn wenn es auch unter vielen möglichen Fällen einen giebt, der die grösste Wahrscheinlichkeit hat, so ist doch das Eintreten irgend eines der übrigen Fälle mit grösserer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, als dass gerade jener eine bestimmte Fall eintreten werde.

Die Gesellschaften sind im Irrthum, wenn sie ihre Verluste Abweichungen vom Gesetz zuschreiben, denn die wirklich erfolgte Sterblichkeit ist selbst Gesetz.

Sehr interessant ist die Frage: ob in der Natur ein festes Gesetz der Sterblichkeit existirt, oder mit andern Worten: ob die Sterblichkeitsverhältnisse sich mit wachsenden Beobachtungszahlen bestimmten Werthen nähern. Die Resultate der Statistik, welche stets auf bestimmte Zahlen und bestimmte Verhältnisse sich beziehen, können hierüber keine Auskunft geben.

Vom rein analytischen Standpunkte hat aber Poisson bewiesen, dass das bestimmte Integral, welches die mittlere Lebensdauer darstellt, einen constanten Werth behält, so lange keine der bekannten oder unbekannten Ursachen, zu denen unter andern die verschiedenen Constitutionen der neugebornen Kinder, klimatische Einflüsse, Krankheiten und die Vermögensumstände der Einwohner gehören, eine merkliche Veränderung erfährt. Denkt man sich nämlich eine unendliche Anzahl verschiedener Constitutionen neugeborner Kinder, für welche die unendlich kleinen Wahrscheinlichkeiten, genau die Zeit = t zu leben, respective sind:

$$w'dt,\ w''dt,\ w'''dt, \ldots,$$

und es mögen ferner

$$W',\ W'',\ W''', \ldots$$

die Wahrscheinlichkeiten dieser Constitutionen bedeuten, so wird, wenn man der Kürze wegen

$$w'W' + w''W'' + w'''W''' + \ldots = Z$$

setzt, dieses Z ein bestimmtes Integral vorstellen, und Zdt die Wahrscheinlichkeit von t, welche sich auf alle möglichen Constitutionen erstreckt, ausdrücken.

Die mathematische Hoffnung auf das Leben eines neugebornen Kindes von unbekannter physischer Constitution findet dann ihren Ausdruck in dem bestimmten Integral

$$\int_0^\infty Ztdt,$$

welches einen unbekannten, aber bestimmten Werth hat.

Bezeichnet s die Summe der Alter, in welchen eine sehr grosse Anzahl, n, in demselben Lande und zu derselben Zeit geborner Individuen gestorben sind, so hat man sehr nahe und höchst wahrscheinlich

$$\frac{s}{n} = \int_0^\infty Ztdt,$$

worin eine der zwei merkwürdigen Gleichungen besteht, in denen das Princip der grossen Zahlen in der Allgemeinheit enthalten ist, wie es Poisson ausgesprochen und durch eine meisterhafte Analyse bewiesen hat.

Das Princip der grossen Zahlen ist der einzig richtige Gesichtspunkt, von welchem aus man die Sterblichkeitsgesetze betrachten muss, und mit der Annahme eines Gesetzes sind uns auch die Sterbenswahrscheinlichkeiten gegeben, an die wir uns bei allen Berechnungen halten müssen, so dass neue Hypothesen weder nöthig sind noch zugelassen werden dürfen.

Aus diesem einfachen Gedanken folgt schon die ganze Lehre vom Risiko, wie sie hier eingeleitet worden ist, indem wir als

Mass der Gefahr die Prämie für die Versicherung gegen jeden möglichen Verlust angenommen, und diese Prämie mit dem mittlern Verlust oder mittlern Gewinn identisch gefunden haben. Will man die Abweichungen der Sterblichkeit vom wahrscheinlichsten Fall als Fehler auffassen, so hat man mit den gegebenen Wahrscheinlichkeiten dieser Fehler zugleich den mittlern Fehler, genau wie bei Naturbeobachtungen, die mit Messungen verbunden sind, wo die Wahrscheinlichkeiten der Fehler bekannt sind und keine Hypothesen über dieselben wie bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gemacht werden müssen. Das mittlere Risiko ist demnach gleich dem halben mittlern Fehler, weil die positiven Fehler oder eventuellen Gewinne nicht berücksichtigt werden. Dieser mittlere Fehler ist verschieden vom mittlern Fehlerquadrat, von welchem Gauss und Bessel aus verschiedenen Gesichtspunkten nachgewiesen haben, dass es da massgebend ist, wo die Methode der kleinsten Quadrate Anwendung findet.

## §. 10.

## Beispiele zur numerischen Berechnung des mittlern Risiko.

Als Beispiele zur Veranschaulichung wollen wir einfachere Fälle wählen, wo die versicherten Personen gleiche Sterbenswahrscheinlichkeit haben und jede derselben auf den Todesfall versichert ist.

Bei einzelnen Versicherungen auf den Todesfall hat die Versicherungsbank Gewinn oder Verlust, je nachdem die eingenommenen reducirten Prämien mehr oder weniger betragen als die durch Todesfälle in Ausgabe kommenden reducirten Summen.*)

---

*) Diese wichtige Berechnung für einfache Versicherungen auf den Todesfall, sowie die für Versicherungen jeglicher Art fehlt in den sonst so ausführlichen und mit allerhand bedeutungslosen Durchschnittszahlen gefüllten Rechenschaftsberichten wohl sämmtlicher Lebensversicherungs-Gesellschaften, so dass selbst die ältesten Gesellschaften nicht wissen, ob ihnen

Hiernach kann man die folgenden 3 Beispiele berechnen, indem man nicht die Fälle des Verlustes, sondern die des Gewinnes in Betracht zieht.

1. Aufgabe.

Es soll für 15 Personen gleichen Alters mit je 5000 Thalern reducirtem Capital und einer Sterbenswahrscheinlichkeit 0,02 das mittlere Risiko auf die Dauer eines Jahres bestimmt werden.

Auflösung.

Die Summe der reducirten Prämien ist gleich $15 \times 0{,}02 \times 5000 = 1500$ und die Bank gewinnt nur in dem einen Falle, wo keine von den versicherten Personen stirbt. Die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist: $0{,}98^{15}$ und der Gewinn $= 1500$, also das mittlere Risiko $= 0{,}98^{15} \times 1500 = 1108$.

2. Aufgabe.

Es sei folgender Versicherungsbestand mit der gemeinsamen Sterbenswahrscheinlichkeit 0,03 gegeben:

| | Personen. | red. Kapital. | red. Prämie. |
|---|---|---|---|
| A. | 1 zu 5000 = | 5000 Thlr. | 150 Thlr. |
| B. | 6 „ 3000 = | 18000 „ | 540 „ |
| C. | 10 „ 1000 = | 10000 „ | 300 „ |
| D. | 30 „ 400 = | 12000 „ | 360 „ |
| Summa | 47 | 45000 Thlr. | 1350 Thlr. |

Welches ist das mittlere Risiko eines Jahres?

Auflösung.

Die Fälle des Gewinnes sind folgende fünf:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | Es sterben | 0 Personen | — | Gewinn | 1350 Thlr. |
| 2) | „ stirbt | 1 „ | aus C | „ | 350 „ |
| 3) | „ „ | 1 „ | „ D | „ | 950 „ |
| 4) | „ sterben | 2 Personen | „ D | „ | 550 „ |
| 5) | „ „ | 3 „ | „ D | „ | 150 „ |

und man hat:

---

die Sterblichkeit in finanzieller Beziehung günstig oder ungünstig gewesen. Auf diesen wichtigen Punkt habe ich zuerst in No. 94 Jahrg. 1867 der „Deutschen Vers.-Ztg." aufmerksam gemacht und weitere Ausführungen in No. 92, 96 u. 101 vom Jahre 1868 gegeben.

$$\begin{array}{lr}
1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}98^{47} \times 1350 = 322{,}56 \\
2) \ldots\ldots\ldots\ldots 10 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{46} \times & 350 = 25{,}86 \\
3) \ldots\ldots\ldots\ldots 30 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{46} \times & 950 = 210{,}60 \\
4) \ldots\ldots \frac{30 \,.\, 29}{2} \times 0{,}03^2 \times 0{,}97^{45} \times & 550 = 54{,}68 \\
5) \ldots \frac{30 \,.\, 29 \,.\, 28}{2 \,.\, 3} \times 0{,}03^3 \times 0{,}97^{44} \times & 150 = 4{,}30 \\
 & \text{Summa } 618{,}00
\end{array}$$

das mittlere Risiko ist also = 618.

3. Aufgabe.

Wenn die Versicherungssumme der 2. Aufgabe von 45000 Thaler auf 47 Personen gleichmässig vertheilt wird, so dass jede mit 957,45 Thaler versichert ist, welches ist das mittlere Risiko dieses Versicherungsbestandes?

Auflösung.

Hier giebt es nur 2 Fälle des Gewinns:

1) Es sterben 0 Personen — Gewinn 1350,00 Thlr.
2) „ stirbt 1 Person — „ 392,55 „

und man findet:

$$\begin{array}{lr}
1) \ldots\ldots\ldots\ldots 0{,}97^{47} \times & 1350{,}00 = 322{,}56 \\
2)\ 47 \times 0{,}03 \times 0{,}97^{46} \times & 392{,}55 = 136{,}34 \\
 & \text{Summe } 458{,}90.
\end{array}$$

Das mittlere Risiko ist also bei gleichen Summen = 458,90 und bei einer ungleichmässigen Vertheilung wie die, welche der Aufgabe 2) zu Grunde liegt, erreicht es die Zahl 618 und ist also viel höher, wie es sein muss.

Denkt man sich zwei Banken, die eine mit dem Versicherungsbestande der 2. Aufgabe und die andere mit dem der 3. Aufgabe, so würde sich der Sicherheitsfonds der ersteren zu dem der letztern Bank verhalten müssen wie 6180 : 4589 oder nahezu wie 4 : 3, damit beide einen gleichen Grad der Sicherheit haben. Durch die ungleichmässige Vertheilung der Gesammtsumme allein schon wird im vorliegenden Falle ein um den 3. Theil grösserer Sicherheitsfonds erforderlich.

## §. 11.

## Ueber den Unterschied zwischen Prämien-Reserve und Sicherheitsfonds (Capital-Reserve).

Die von uns aufgestellte Fundamental-Gleichung 3) (§. 5) enthält die unerlässliche Bedingung für die Zahlungsfähigkeit einer Versicherungsbank und sie besagt, dass Leistung und Gegenleistung sich das Gleichgewicht halten müssen. Dieses Gleichgewicht wird stets durch die richtig berechnete Prämien-Reserve hergestellt. Aus eben derselben Gleichung ergiebt sich die Höhe des mittlern Risiko, zu dessen Bestimmung also die vollständige Kenntniss des Versicherungsbestandes nöthig ist, mithin übt auch die Reserve auf das mittlere Risiko einen Einfluss aus. Aus der Prämien-Reserve allein ist aber keineswegs ein Schluss auf die Sicherheit der Bank zu ziehen. Wenn die eine Bank mehr Reserve hat als die andere, so muss sie mehr besitzen, weil ihr Passivum um eben so viel grösser ist. Den Grad der Sicherheit entscheidet nur das Verhältniss des Sicherheitsfonds zum mittlern Risiko und der charakteristische Unterschied zwischen dem Sicherheitsfonds und der Prämien-Reserve besteht darin, dass jener verfügbar ist, während diese eine Schuld der Gesellschaft darstellt.

Daraus geht hervor, dass man in der Prämien-Reserve keine Mittel gegen ungünstige Sterblichkeit zu suchen hat, denn sie hat nur die einzige Bedingung zu erfüllen, dass sie zwischen Leistung und Gegenleistung das Gleichgewicht herstellt. Wollte man in der Prämien-Reserve Deckung für jedes Risiko suchen, so würde man zu dem Schluss gelangen, dass der Gewinn aus der günstigen Sterblichkeit nicht vertheilt werden dürfe, in der Erwartung, dass künftig eine ungünstige Sterblichkeit den Ausgleich herbeiführen werde, während man ja sonst den Faden, der die Vergangenheit mit der Zukunft verbindet, willkürlich durchschneidet.

Die Prämien-Reserve muss also genau berechnet werden; sie darf weder zu hoch noch zu niedrig sein.

Ueber die Berechnungsweise selbst kann kein Zweifel bestehen, wenn nur die positiven und negativen Leistungen gegeben sind.

Es kommt hierbei auf die Natur der Leistung nicht an, denn die aufgestellte Bedingungsgleichung enthält nur positive und negative Grössen, die, welcher Art immer, Sterbefallzahlungen, Renten, Prämien-Rückgewähr, Verwaltungskosten u. dgl., sein mögen.

Man kann sich daher bei der Berechnung der Reserven auf die sogenannten Netto-Prämien allein, welche die positiven Leistungen auf Sterbefallzahlungen beschränken, nicht in allen Fällen stützen; denn es wird ein solches Princip schon bei Versicherungen mit einmaliger Zahlung des Versicherten ad absurdum geführt, indem hier die zukünftigen Verwaltungskosten unberücksichtigt bleiben würden.

Wenn bei gewöhnlichen Versicherungen auf den Todesfall im ersten Jahre eine besondere Ausgabe für den Versicherten eintritt, die in der Prämien-Berechnung berücksichtigt ist, sei es nun eine ausserordentliche Sterbegefahr oder sei es eine vom Versicherten für das erste Jahr bedungene höhere Summe oder sei es endlich eine Provision, die dem Versicherten zur Last fällt, so wird die Reserve in den ersten Jahren nicht zu der sonstigen Höhe steigen können. Trotzdem glauben Viele, dass die nach Netto-Prämien sich ergebende höhere Reserve unbedingt nöthig sei, wenn auch die Abschluss-Provision in der Prämien-Berechnung berücksichtigt ist. Eine solche Ansicht ist durchaus irrig. Man hat in dem Umstande, dass durch die Abschluss-Provision die Prämien-Reserve in den ersten Jahren niedriger ausfällt, während die Verbindlichkeiten der Bank grosse Dimensionen annehmen können, eine Gefahr entstehen sehen, die man durch die Reserve nach Netto-Prämien beseitigen wollte. Dieser Gedanke einer vergrösserten Gefahr ist an sich ganz richtig, man ist aber in Beziehung auf das Mittel, dieselbe zu beseitigen in einen Fehlschluss verfallen, indem man übersehen hat, dass durch die Erhöhung der Prämien-Reserve einerseits die Passiva der Bank andererseits um eben so viel steigen, wenn jene Reserve als die zur Erfüllung der Verbindlichkeiten nothwendige angesehen wird. Wenn die Bank zu dieser Reserve stets gezwungen wird, so sind ihr eben dadurch die Hilfsmittel entzogen, besondere Verluste zu decken.

Der Betrag, um welchen sich das mittlere Risiko hierdurch vermindert, ist verschwindend klein gegen den Reserve-Ueberschuss und es handelt sich eigentlich bloss um eine Vermehrung des Sicherheitsfonds, nicht aber um eine Erhöhung der Reserve.

Da die Reserve sich überhaupt nach den Bedingungen der Versicherung richtet und nicht umgekehrt, so kann man auch keiner Gesellschaft in einem Satz vorschreiben, wie sie ihre Reserven berechnen soll. Die Bedingungen der Versicherung können es auch mit sich bringen, dass in den ersten Jahren gar keine Reserve nothwendig wird und doch kann man eine solche Versicherung nicht von der Hand weisen. Nur in dem Falle, wo die Reserve negativ wird, und dies kann z. B. bei steigenden Prämien geschehen, wird die Versicherung nicht geschlossen, weil negative Reserve eine Schuld des Versicherten bedeutet, und im Todesfalle oder bei freiwilligem Ausscheiden desselben die Gesellschaft den Betrag der negativen Reserve verliert. Trotz dieses Umstandes machen wohl einzelne Gesellschaften aus missverstandenem Interesse in Gewährung von Provisionen solche Ausschreitungen, dass der Verlust auf der Hand liegt, ein Verlust, der jedoch unabhängig von der Methode der Reserve-Berechnung entsteht.

## §. 12.

## Kritik der bisherigen Versuche eine Theorie des Risiko aufzustellen.

Literatur.

Tetens, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1786. 2. Theil, 3. Abhandl.

Raedell, Lebensfähigkeit von Versicherungs-Anstalten. Berlin 1857. Seite 219—239.

Bremiker, Das Risiko bei Lebensversicherungen. Berlin 1859.

Zech, Das Risiko bei Lebensversicherungen. Tübingen 1861.

Lachmund, Das Risiko bei der Lebensversicherung. (Elsner's Archiv für das Versicherungswesen. 1. Band. Berlin 1864. Seite 170—184.)

Sprague, On the Limitation of Risks (Journal of the Institute of Actuaries. No. LXIII. April 1866. Pag. 20—39).

J. N. Tetens, Professor der Mathematik und Philosophie zu Kiel, war der erste, der sich mit der Theorie des Risiko beschäftigte. In seinem vortrefflichen Werke, welches trotz seines veralteten Standpunktes noch immer lesenswerth ist, geht Tetens in ausführliche Betrachtungen über das Risiko ein, und spricht sich über den Begriff sehr klar aus, ohne ihn jedoch auf eine beliebige Zahl von Versicherten mit verschiedenen Summen zu erweitern. Zur Begründung seiner Theorie führt der Verfasser ein grosses Heer mathematischer Sätze in's Feld, auf die ich hier bei den mir gesetzten Grenzen nicht eingehen, und nur bemerken will, dass meines Erachtens diesem verdienten Manne Unrecht geschieht, wenn es bei den neuern Schriftstellern heisst, er schwanke über den Begriff des Risiko, denn nicht über den Begriff, sondern über die Methode herrscht bei ihm die Unsicherheit. Aus dem grösstmöglichen Gewinn und grösstmöglichen Verlust zieht er eine Annäherung des Risiko für einzelne Renten und von diesem geht er auf das Risiko für mehrere Personen über, woraus zu ersehen ist, dass seine Theorie sehr ungenügende Resultate geben muss.

Nachdem das Risiko 70 Jahre lang keine Bearbeitung gefunden zu haben scheint, trat Dr. Raedell mit einer Theorie auf, wobei er gewisse Sätze aus der Theorie des mittlern Fehlers in der Methode der kleinsten Quadrate ohne jede Begründung auf das Risiko übertrug. Raedell berechnet, von Tetens Definition ausgehend, für einzelne Renten den mittlern Verlust direct, welcher das Risiko der Bank beim Verkauf einer Rente darstellen soll. Beim Kauf einer Rente wendet er eine andere und falsche Methode an, die ein von dem frühern verschiedenes Resultat liefert, welche Verschiedenheit dem Verfasser, wie er äussert, in der Natur der Sache zu liegen scheine. Um nun zum Risiko für mehrere Versicherungen zu gelangen, macht Raedell einen salto mortale, indem er einfach behauptet: das Risiko aus mehreren Geschäften sei gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Risiken aus den einzelnen Geschäften, und drückt dabei sein Bedauern aus, dass er den Beweis dieses Satzes seinen Lesern schuldig

bleiben müsse, weil es ihm nicht gelungen sei, „ihn in den Kreis des arithmetischen Wissens zu bannen".

Die Schriftsteller nach Raedell, mit Ausnahme des Engländers Sprague, wenden nun ebenfalls die Methode der kleinsten Quadrate an, behandeln aber den Gegenstand sehr verschieden.

Ich will ihre Haupt-Gesichtspunkte ohne weitere Kritik angeben, um dann eine Digression über die Methode der kleinsten Quadrate zu machen, wobei sich ergeben wird, dass diese auf die hierher gehörigen Untersuchungen gar nicht anwendbar ist.

Herr Dr. Bremiker beschäftigt sich zunächst mit dem Risiko für einzelne Versicherungen und identificirt dieses mit der Quadratwurzel aus der Summe aller Fehlerquadrate dividirt durch deren Anzahl, während er die Fehlerquadrate selbst aus den Abweichungen aller einzelnen Fälle gegen den Durchschnitts- oder wahrscheinlichsten Werth bildet. Diese Definition ist also von der Raedell'schen verschieden; den Uebergang zu mehreren Versicherungen macht er aber eben so wie sein Vorgänger. Ausserdem rügt Herr Dr. Bremiker mit Recht die Raedell'sche falsche Unterscheidung zwischen Kauf und Verkauf.

Dr. Julius Zech, Professor der Mathematik und Astronomie in Tübingen, erklärt Dr. Bremiker's Theorie für falsch, und zwar deshalb, weil die Abweichungen keine zufälligen, sondern in der Prämienberechnung bereits berücksichtigt seien, daher die Methode der kleinsten Quadrate darauf nicht angewendet werden könne. Zech sucht nun das Risiko darin, dass in der Wirklichkeit die Sterblichkeit und der Zinsertrag andere Werthe haben, als bei der Berechnung vorausgesetzt worden ist. Durch Hypothesen in Bezug auf die Abweichungen kommt Zech mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate auf mittlere Fehler, welche nach ihm das Risiko bei einzelnen Versicherungen sein sollen. Von einem Risiko bei mehreren Versicherungen ist bei Zech keine Rede.

Herr Julius Lachmund eröffnet seinen Aufsatz mit einer viel versprechenden Einleitung und schliesst denselben mit dem Wunsche, dass die Wissenschaft ihr Urtheil hinsichtlich des Aufbaues seiner Formeln, deren richtige Begründung man nach ihm nicht bezweifeln dürfe, aussprechen möge. Die „naturgemässen Ursachen" des

Risiko erblickt der Verfasser in den „periodischen Sterblichkeitsschwankungen“, wobei für die Dauer einer Periode Annahmen gemacht werden müssten. „Man kann sich hierbei“, sagt der Verfasser, „an die Erfahrung halten und thut unter zweifelhaften Umständen gut, in diesen Annahmen nicht zu tief zu greifen“. Ferner sagt der Verfasser: „Man hat überdies nicht nöthig, bei diesen Annahmen allzu ängstlich zu sein u. s. w.“, „und man zudem im Stande ist, die Annahme für das zunächst folgende Rechnungsjahr am Schlusse desselben mit der Wirklichkeit zu confrontiren, geeignet zu corrigiren und auf Grund dieser neuen Erfahrung weiter zu schliessen“. Nun folgen Hypothesen, auf deren Grund mittlere Fehler gezogen, quadrirt werden u. s. f. Es folgen neue Hypothesen in Bezug auf die Verhältnisse der verschiedenen Ausgleichungsperioden, wovon eine auf Grund eigener Versuche beruhen soll. Hierauf wird von Ausgleichungsperioden in Beziehung auf die verschiedenen Summen gesprochen, von denen Herr Lachmund meint, dass sich schwerlich theoretische und zugleich praktisch brauchbare Sätze würden finden lassen, während directe Untersuchungen das Gesetz viel leichter ausdrückten. Es kommen noch mehrere Rathschläge und ein paar Beispiele, wobei „Fehlertodte“ keine unbedeutende Rolle spielen, und hierauf der bereits erwähnte Schluss.

Herr Thomas Bond Sprague, Vicepräsident des Institute of Actuaries in London, stellt über die möglichen Verluste und deren Wahrscheinlichkeiten verschiedene Sätze auf, ohne, in Bezug auf die Hauptfrage, zu einem Resultate zu gelangen. Unter Verlust versteht er die volle Capital-Auszahlung der Bank, und beweist unter anderm, dass die totale „mathematische Hoffnung“ auf diesen Verlust von der Anzahl der Policen unabhängig ist, welches aber ein sehr bekannter Satz ist. Der Verfasser macht jedoch auch keinen Anspruch, das Problem gelöst zu haben, indem er zum Schlusse sagt:

„I have now only to remark, in conclusion, that I am well aware that my subject is far from exhausted by the preceding remarks, and that much remains to be done to complete the mathematical part of the inquiry“.

Die Schöpfer der sinnreichen Methode der kleinsten Quadrate, Gauss und Legendre, bedienten sich derselben ursprünglich bei der Berechnung von Planeten- und Cometen-Bahnen aus Beobachtungen, die vermöge der Unzulänglichkeit der Sinne und Ungenauigkeit der Instrumente auch bei der grössten Sorgfalt und Kunst mit kleinen Fehlern behaftet bleiben. Nachher dehnte man ihren Gebrauch auf alle Massbestimmungen in der Physik und Geodäsie aus. Die Aufgabe, welche durch diese Methode gelöst werden soll, besteht im Allgemeinen in Folgendem:

Aus n durch directe Beobachtung gefundenen Werthen einer Function von bekannter Form für n verschiedene Werthsysteme der Variabeln u, v, w, . . ., diejenige Complexion von Werthen der darin vorkommenden m Constanten, wo $m < n$, zu bestimmen, welche unter allen möglichen Complexionen die grösste Wahrscheinlichkeit hat.

Aus verschiedenen analytischen Betrachtungen wird man darauf geführt, dass man die Constanten so bestimmen muss, dass die Summe der Quadrate der Fehler, welche unter Voraussetzung dieser Werthe entstehen, zu einem Minimum werde. Hierbei ergiebt sich, dass die Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers als unabhängig von seiner Grösse ausdrückt, die Form hat:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2} dx,$$

und die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der Fehler innerhalb des unendlich kleinen Intervalles x und $x + dx$ liege.

Betrachtet man diese Funktion, so fallen zwei Haupteigenschaften derselben in die Augen, dass sie nämlich erstens Continuität der Fehler voraussetzt, und zweitens für positive und negative Fehler von derselben Grösse gleiche Wahrscheinlichkeiten giebt. Daraus geht hervor, dass bei der Anwendung dieser Methode, wenn keine anderweitige Berechtigung derselben vorliegt, diese zwei Bedingungen nothwendig erfüllt sein müssen. Nichtsdestoweniger sehen wir sie auf Gegenstände angewandt, die weit entfernt sind, diesen Bedingungen zu genügen. Wenn ich die falsche Anwendung derselben bei Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten

nachweise, so wird es kaum noch nöthig sein, zu zeigen, dass sie mit der Theorie des Risiko nichts gemein hat.

Es sei mir demnach gestattet, ein sehr einfaches Beispiel anzuführen, wo zwei der bedeutendsten Männer auf dem Gebiete der Mortalitätsstatistik über die Zulässigkeit der Methode der kleinsten Quadrate zwar einig sind, in Beziehung auf die Anwendung aber weit auseinander gehen, während man doch glauben sollte, dass hier, wie überhaupt in der Mathematik, keine Meinungsverschiedenheiten herrschen könnten, wenn die Principien feststehen.

In einem Aufsatz in Masius' Rundschau der Versicherungen (III. Jahrgang Seite 336) berechnet Herr Dr. Heym die Sterbenswahrscheinlichkeit aus einer Reihe gleichzeitiger Bevölkerungs- und Todtenlisten für ein gewisses Alter, nach der Methode der kleinsten Quadrate, indem er setzt:

$$\begin{aligned} n_1 \, x &= m_1 \\ n_2 \, x &= m_2 \\ n_3 \, x &= m_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

und x als die zu bestimmende Grösse, $m_1$, $m_2$, $m_3$, .... als die beobachteten Werthe der ihrer Form nach bekannten Function ansieht. Demgemäss erhält er nach den bekannten Regeln:

$$x = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \ldots}{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots}.$$

Herr Dr. Fischer in seinen Grundzügen des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens, Oppenheim a. R. 1860 (Seite 94—98), kann sich mit der von Herrn Dr. Heym gebrauchten Form der Grundgleichung nicht einverstanden erklären, indem er den an sich ganz richtigen Grund angiebt, dass den Fehlergrössen, deren Summe ihren Minimalwerth erhalten soll, von vorn herein keine gleichen Werthe beizulegen seien, da sie aus verschiedenen Zahlen der Lebenden herrühren. Herr Dr. Fischer sucht zuerst die Gewichte dieser Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit zu bestimmen, indem er dieselben den Zahlen der Lebenden umgekehrt proportional nimmt; die Glei-

chungen erscheinen ihm aber auch dann nicht von gleicher Genauigkeit, da die Sterbenswahrscheinlichkeit unter sonst gleichen Umständen aus grössern Zahlen genauer hervorgehe. Aus dieser Schwierigkeit, meint der Verfasser, käme man heraus, wenn man die Gewichte den Quadratwurzeln aus jenen Zahlen umgekehrt proportional nähme. —

Hier sei mir die Frage erlaubt, wenn die ganze Operation von der Laune des Rechners abhängen soll, wozu denn noch eine Methode? — Ich sollte aber meinen, dass man schon in der von Gauss in seiner Theoria motus corporum coelestium gegebenen Begründung jener Methode eine feste Stütze hätte, um bei der Anwendung nicht fehl zu gehen. Alle Schriftsteller, welche die genannte Methode auf Sterblichkeitsverhältnisse oder auf das Risiko anwenden, erwähnen in auffallender Weise mit keinem Worte, wo denn eigentlich die Berechtigung dieser Anwendung zu suchen wäre. Namentlich Herr Dr. Fischer ist es, der von der Methode der kleinsten Quadrate den umfassendsten Gebrauch macht und dieselbe als Orakel für alle seine Fragen anzusehen scheint.

Es bleibt durchaus nicht ausgeschlossen, dass man die Methode der kleinsten Quadrate unter gewissen Bedingungen bei fortschreitenden Untersuchungen auf Sterblichkeitsgesetze werde anwenden können, aber die Strenge des Beweises müsste allemal vorangehen, denn die Handhabung allein erfordert schon ein scharfes, unbefangenes Urtheil. Man könnte sie sogar auf das angeführte Beispiel nach den richtigen Grundsätzen anwenden und dasselbe Resultat erhalten, zu welchem wir durch directe Aufsuchung des Maximums der Wahrscheinlichkeit schon bei einer frühern Gelegenheit gelangt sind. Gesetzt man habe k Beobachtungen aus gleichen Zahlen lebender Personen

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots . = n_k = n$$

mit verschiedenen Sterblichkeits-Resultaten, und betrachte die Sterbenswahrscheinlichkeit als diejenige Grösse, welche Beobachtungsfehlern unterworfen ist, so giebt das arithmetische Mittel aus den beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten den wahrscheinlichsten Werth der gesuchten Grösse, nämlich:

$$x = \frac{\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \frac{m_3}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n}}{k}.$$

Sind aber die Grössen $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k$ von einander verschieden, so verhalten sich die Gewichte der Beobachtungen wie diese Grössen zu einander, welche als Repetitionszahlen angesehen werden können, und man hat mithin nach bekannten Regeln:

$$x = \frac{n_1 \cdot \frac{m_1}{n_1} + n_2 \cdot \frac{m_2}{n_2} + \ldots + n_k \cdot \frac{m_k}{n_k}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$$

oder einfach

$$x = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{n_1 + n_1 + \ldots + n_k}.$$

Der Grund, weshalb die Methode in der angeführten Art anzuwenden ist, und auf ein richtiges Resultat führt, ist gar nicht so einfach, sondern liegt vielmehr sehr tief in einer subtilen Analyse, mit deren Andeutung ich mich begnügen will. Wenn man nämlich sich die Frage stellt, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass die wirkliche Sterbenswahrscheinlichkeit zwischen den Grenzen $\frac{m}{n} + x$ und $\frac{m}{n} - x$ liege, wo $\frac{m}{n}$ die beobachtete Sterbenswahrscheinlichkeit ist, so wird man bei deren Lösung die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Function von m und n ausdrücken. Lässt man nun m und n beständig wachsen, so nähert sich jene Function dem bestimmten Integral

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 x^2} dx$$

wo $\delta$ den speciell angenommenen Werth von x bedeutet. Man sieht, dass diese Function ganz dieselbe ist, durch welche in der Methode der kleinsten Quadrate die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler innerhalb zweier gegebenen Grenzen $+\delta$ und $-\delta$ liege, ausgedrückt wird; nur ist zu bemerken, dass die Constante h, welche dort die Präcision darstellt, hier statt des Ausdruckes $\sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}$ vorkommt.

Das Gesagte mag nun hinreichen, den Nachweis geführt zu haben, dass die besprochenen Gegenstände durch tiefere Unter-

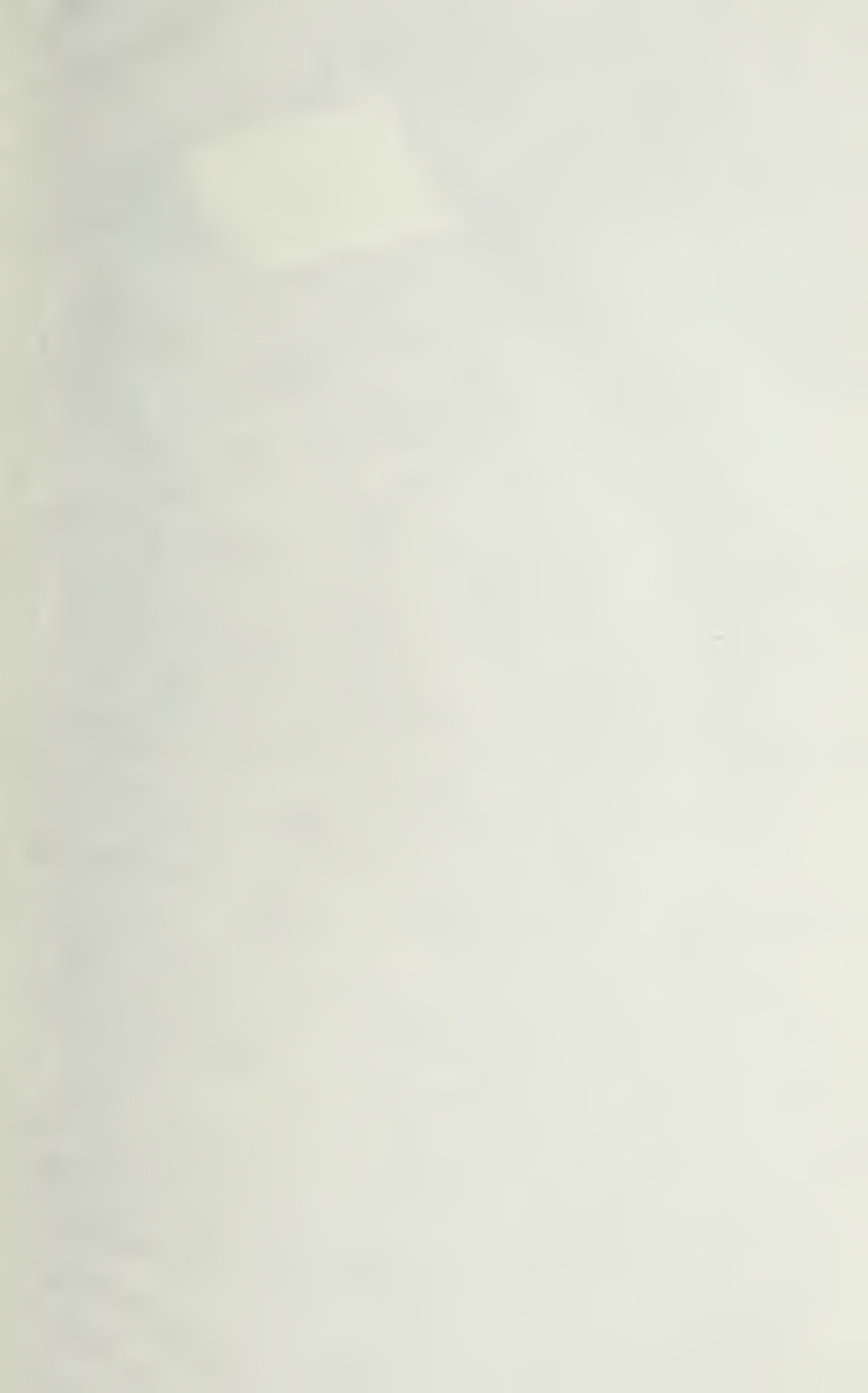
suchungen und Betrachtungen anderer Art behandelt werden müssen, als es bis jetzt geschehen ist*). Will man eine mathematische Untersuchung mit Erfolg durchführen, so muss man sich die Aufgabe klar präcisiren und in den analytischen Operationen sich von ihrer Bedeutung auf jedem Schritte Rechenschaft geben. Durch täuschende Analogien und blindes Vertrauen in analytische Identitäten versinkt der reine Gedanke in ein Zeichenspiel, wo der Schein für Wahrheit genommen wird.

Laplace äussert sich in der Einleitung zu seinem Meisterwerke über Wahrscheinlichkeits-Rechnung, das ein hervorragendes Monument mathematischen Scharfsinnes bildet, sehr treffend: . . . la théorie des probabilités n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul: elle fait apprécier avec exactitude, ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte etc.

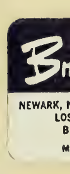
Diese Worte des grossen Mathematikers verdienen alle Beachtung.

---

*) Seitdem dies niedergeschrieben wurde (Sept. 1867) ist die ausgezeichnete Arbeit von Wittstein erschienen. In technischer Beziehung ist die Schrift von Dr. Knapp „Ueber die Ermittelung der Sterlichkeit etc." (Leipzig 1868) als ein bedeutender Fortschritt zu begrüssen. Zeuner's „Abhandlungen aus der mathem. Statistik" (Leipzig 1869) enthalten Vereinfachungen der von Knapp aufgestellten analytischen Beziehungen und noch andere interessante Untersuchungen.








UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 045040935